



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS



ANÁLISE E MODELAGEM DE LINHAS DE TRANSMISSÃO NÃO LINEARES COM ELEMENTOS CONCENTRADOS

**RELATÓRIO DE PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
(PIBIC/CNPq/INPE)**

Matheus Gabriel Carneiro de Aquino (ITA, Bolsista PIBIC/CNPq)

E-mail: matheusgca16@gmail.com

Joaquim J. Barroso (LAP/CTE/INPE, Orientador)

E-mail: barroso@plasma.inpe.br

Julho de 2013

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

CONSIDERAÇÕES GERAIS

Uma linha de transmissão não linear (LTNL) é uma linha de transmissão periodicamente carregada com elementos não lineares, sejam varactores ou indutores saturados. Devido ao rápido avanço da tecnologia de circuitos eletrônicos demandando um contínuo aumento na frequência de operação de circuitos integrados, as interconexões entre dispositivos eletrônicos podem se comportar como linhas de transmissão. Atrasos não intencionais de sinais, tensões de crosstalk, reflexões e sobretensões de sinais nas terminações dos componentes prejudicam a correta operação de circuitos eletrônicos. Para confrontar tais problemas em processamento digital de alta velocidade, há necessidade de reduzir o atraso de propagação de sinais entre os elementos do circuito [1][2]. Nesse sentido, para o projeto e testes de tais componentes, técnicas precisas e eficientes de simulação são requeridas, e tais análises devem ser realizadas no domínio do tempo para que sejam quantificadas corretamente as perdas e o atraso de pulsos entre as conexões. A análise no domínio do tempo torna-se essencial em linhas de transmissão de sistemas de potência para a avaliação de processos transitórios, sejam excitados por campos eletromagnéticos externos, por emissão de radares de alta potência ou por descargas de raios.

O principal uso de linhas de transmissão é transmitir potência de RF entre localizações separadas por distâncias comparáveis a um quarto do comprimento de onda ($\lambda/4$) correspondente à frequência de operação. No outro limite, quando o comprimento da linha é muito menor que $\lambda/4$, o tempo de atraso de transmissão constitui uma pequena fração do período de oscilação, e assim o sistema pode ser analisado usando-se a teoria usual de circuitos elétricos. Em termos de comprimento de onda, circuitos onde qualquer conexão entre seus elementos seja pequena em relação ao comprimento de onda associado à mais alta frequência de interesse é denominado circuito de elementos concentrados.

Tal restrição de que a dimensão do circuito seja muito menor que o comprimento de onda assegura a validade das leis de Kirchhoff para tensão e corrente, refletindo o fato de que as leis de Kirchhoff são aproximações das equações de Maxwell.

Linhas de transmissão de elementos concentrados [3] são implementadas por uma sequência em cascata (ver Figura 1.1) de combinações de elementos reativos (L, C) e passivos (R, G), onde a resistência R e a condutância G, respectivamente, representam a imperfeição dos condutores (atenuação causada por perdas ôhmicas) e a imperfeição da isolamento (corrente de fuga através do dielétrico de isolamento entre os condutores). Na maioria dos regimes de operação de linhas de transmissão, a perda de energia nos condutores é maior que a perda no isolante dielétrico, ou seja, $R/L > G/C$.

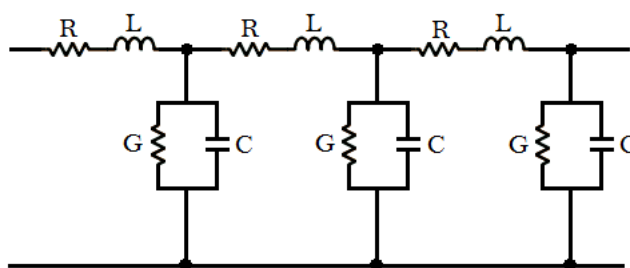


Figura 1.1 – Circuito Periódico formado por elementos concentrados. Redes deste tipo, com resistências R em série com indutores L e condutâncias G em paralelos com capacitores C, também referidas por linhas de transmissão artificiais, são usadas na modelagem de sistemas de transmissão. Em frequências de operação bem menores que a frequência crítica $1/\pi\sqrt{LC}$, tal linha discreta comporta-se essencialmente como uma linha distribuída (ou contínua).

Ressalta-se ainda, que linhas de transmissão são amplamente usadas na conexão de rádio transmissores e receptores com antenas e também na distribuição de sinais entre sistemas de comunicação. Além disso, apresentando a habilidade de manipular e conformar sinais de alta potência com a finalidade de concentrar e liberar pulsos intensos de energia utilizando sistemas compactos e de dimensões reduzidas, linhas de transmissão de potência pulsada constituem uma tecnologia de interesse na área espacial e em defesa.

Com essa motivação, propõe-se modelar e analisar linhas de transmissão não lineares com células CL (C e L denotando a capacitância série e a indutância shunt em cada

célula), pois, como será visto, a linha CL forma um sistema compacto e que tem várias aplicações em engenharia (defasadores, antenas de dimensões elétricas reduzidas, diplexadores, acopladores, amplificadores paramétricos) [4]-[8] exibindo regimes de propagação de ondas regressivas semelhantes aos encontrados em metamateriais de índice de refração negativo [9]-[16]. Em um estudo comparativo, será feita a análise da linha dual LC (L e C denotando a indutância série e a capacitância shunt em cada célula).

Assim, com base nas soluções analítica e numérica de equações diferenciais ordinárias no domínio do tempo, faz-se um estudo comparativo entre duas formulações matemáticas, importantes do ponto de vista conceitual, mas pouco discutidas na literatura. Para a primeira formulação têm-se como variáveis de estado a corrente de malha i_L que circula na seção k, e a correspondente carga q armazenada no capacitor da seção k. Para a outra formulação tem-se a corrente i_L no indutor da seção k e a correspondente tensão v_k no capacitor da seção k. De importância do ponto de vista numérico e uma vez que existem poucos estudos com este tipo de formulação, serão adotadas estas variáveis de maneira que as equações diferenciais formuladas sejam todas de primeira ordem.

Observa-se que em todos os trabalhos até então consultados [17]-[28], os valores característicos dos componentes de cada seção são repetidos periodicamente ao longo da linha, ou seja, $L_1 = L_2 = \dots = L_N$, $C_1 = C_2 = \dots = C_N$, o que acarreta limitação de modelagem no contexto experimental, uma vez que, devido a tolerâncias de fabricação, dois componentes com a mesma especificação ou com o mesmo número de série não são exatamente iguais. Portanto, constituindo uma das contribuições deste trabalho, as equações diferenciais de circuito serão deduzidas em uma formulação geral, em que os elementos do circuito são indexados individualmente. Assim, para cada componente pode ser atribuído um valor específico ou uma característica específica requerida de projeto.

Finalmente, deve-se notar que em certas aplicações de linhas de transmissão necessita-se de um grande número de seções. Por exemplo, em excitação de sólitons em linhas não lineares de topologia LC, para a geração de RF, onde são tipicamente requeridas de 50 a 200 seções [29], torna mais impraticável o uso de simuladores de circuito neste caso. Por outro lado, tal número de seções e suas variações de topologia são facilmente

tratadas com a formulação matemática a ser efetivada em um sistema de equações diferenciais ordinárias.

OBJETIVOS

Este projeto tem como objetivo estudar os fenômenos de propagação em linhas de transmissão não lineares (LTNLs), considerando a capacitância e outras dependências não lineares da tensão com a carga e desenvolver uma formulação geral para as equações diferenciais de primeira ordem no domínio do tempo, utilizando duas formulações: $\{i(t) \text{ e } q(t)\}$ e $\{i(t) \text{ e } v(t)\}$, onde $i(t)$ é corrente que flui em cada malha, $q(t)$ é a carga armazenada em cada capacitor e $v(t)$ é a tensão em cada capacitor, para as topologias LC e CL com elementos concentrados, de maneira que a cada elemento discreto em uma seção particular k , possam ser atribuídos valores arbitrários para L_k , C_k , e para os correspondentes resistores $r_{L,k}$, $r_{C,k}$.

CAPÍTULO 2

EQUAÇÕES GENERALIZADAS DE CIRCUITO PARA LINHAS DE TRANSMISSÃO NÃO LINEARES LC E CL

A descrição matemática das propriedades de linhas de transmissão fundamenta-se nas leis de Kirchhoff de corrente e de tensão, que são aproximações quase estáticas das equações de Maxwell $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}$ e $\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$. Representando vínculos lineares impostos às tensões e correntes nos ramos do circuito e não dependendo da natureza dos elementos elétricos, as leis de Kirchhoff aplicam-se a circuitos com elementos concentrados desde que o tempo de propagação de sinais através da linha seja desprezível em comparação com o período do sinal de mais alta frequência de interesse.

Expressando-se de outra forma, a modelagem de circuitos com elementos discretos com base nas leis de Kirchhoff é válida na condição em que a dimensão física do circuito é pequena comparada ao comprimento de onda correspondente à mais alta frequência em consideração.

No que segue, serão apresentadas as equações de circuito generalizadas para as formulações $\{i(t), v(t)\}$ e $\{i(t), q(t)\}$.

FORMULAÇÃO $\{i(t), v(t)\}$

LINHA LC

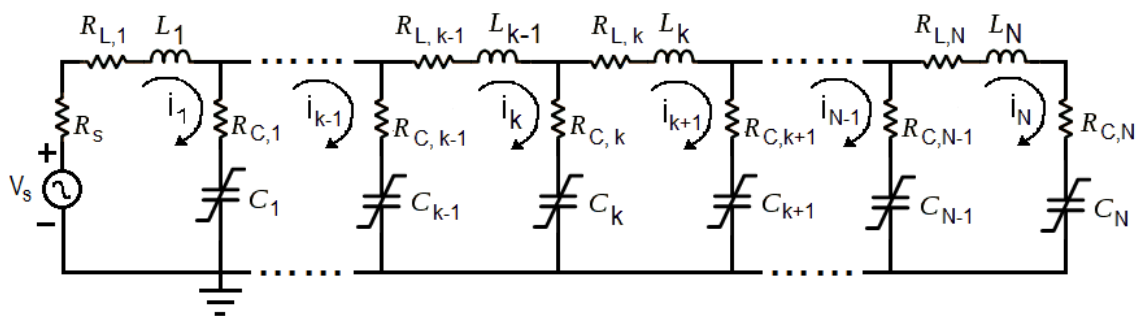


Figura - 2.1. Linha de topologia LC não linear generalizada.

A Figura 2.1 mostra uma linha LC generalizada, onde as variáveis de estado consideradas são a corrente I_k no indutor da seção k e a tensão no capacitor $v_k(t)$ expressa em função da capacitância. De importância do ponto de vista numérico, foram adotadas estas variáveis de maneira que as equações diferenciais para esta linha sejam todas de primeira ordem. Considera-se ainda uma linha com perdas, onde cada indutor tem uma resistência em série $r_{L,k}$, cada capacitor tem uma resistência $r_{C,k}$ e o gerador tem uma resistência r_s .

Vamos nos referir inicialmente a uma linha com apenas três seções, conforme ilustrada na Figura 2.2.

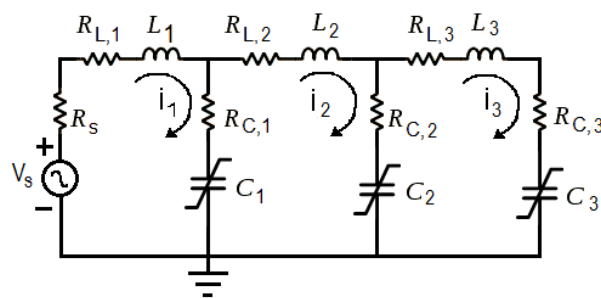


Figura 2.2 - Circuito de uma Linha LC não linear com três seções.

Considerando cada uma das unidades de seção LC (ver Figura 2.2), a partir das leis de Kirchhoff para tensão e corrente, obtemos as seguintes equações para esta linha:

$$\begin{aligned}
 V_0 - V_1 &= L_1 \frac{dI_1}{dt} + r_{L,1} I_1 \\
 V_1 - V_2 &= L_2 \frac{dI_2}{dt} + r_{L,2} I_2 \\
 V_2 - V_3 &= L_3 \frac{dI_3}{dt} + r_{L,3} I_3
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $V_1(t)$, $V_2(t)$ e $V_3(t)$ representam as tensões em cada nó e $I_1(t)$, $I_2(t)$ e $I_3(t)$ representam as correntes que circulam nas malhas.

$$\begin{aligned}
V_0 &= V_s - r_s I_1 \\
V_1 &= r_{C,1} (I_1 - I_2) + v_1(t) \\
V_2 &= r_{C,2} (I_2 - I_3) + v_2(t) \\
V_3 &= r_{C,3} I_3 + v_3(t)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

podemos então combinar (2.1) e (2.2) e desta forma escrever o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem:

$$\begin{aligned}
\frac{dI_1}{dt} &= \frac{V_s}{L_1} - \frac{r_s}{L_1} (I_1) - \frac{r_{L,2}}{L_1} (I_1) - \frac{r_{c,1}}{L_1} (I_1 - I_2) - \frac{v_1(t)}{L_1} \\
\frac{dI_2}{dt} &= -\frac{r_{L,2}}{L_2} (I_2) - \frac{r_{c,1}}{L_2} (I_1 - I_2) - \frac{r_{c,2}}{L_2} (I_2 - I_3) + \frac{v_1(t)}{L_2} - \frac{v_2(t)}{L_2} \\
\frac{dI_3}{dt} &= -\frac{r_{L,3}}{L_3} (I_3) - \frac{r_{c,2}}{L_3} (I_2 - I_3) - \frac{r_{c,3}}{L_3} (I_3) + \frac{v_2(t)}{L_3} - \frac{v_3(t)}{L_3} \\
\frac{dv_i}{dt} &= \frac{I_i}{C(v_i(t))}, \quad i = 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Ao generalizar as equações para um número qualquer de seções optamos por escrever as equações para três categorias de seções: inicial, intermediárias e final. Cada uma destas seções corresponde a duas equações, conforme apresentado a seguir:

Seção Inicial:

$$\begin{aligned}
\frac{dI_k}{dt} &= \frac{V_s}{L_k} - \frac{r_s}{L_k} (I_k) - \frac{r_{L,k+1}}{L_k} (I_k) - \frac{r_{C,k}}{L_k} (I_k - I_{k+1}) - \frac{v_k(t)}{L_k} \\
\frac{dv_k}{dt} &= \frac{I_k}{C(v_k(t))}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

onde $k = 1$ e V_s representa a tensão de entrada, podendo ser um sinal senoidal, ou uma forma arbitrária de pulso (trapezoidal, triangular, etc.)

Seção Intermediária:

$$\frac{dI_k}{dt} = -\frac{r_{L,k}}{L_k}(I_k) - \frac{r_{C,k-1}}{L_k}(I_{k-1} - I_k) - \frac{r_{C,k}}{L_k}(I_k - I_{k+1}) + \frac{v_{k-1}(t)}{L_k} - \frac{v_k(t)}{L_k}$$

$$\frac{dv_k}{dt} = \frac{I_k}{C(v_k(t))}; \quad k=2,3,\dots,N-1$$
(2.5)

Seção Final:

$$\frac{dI_k}{dt} = -\frac{r_{L,k}}{L_k}(I_k) - \frac{r_{C,k-1}}{L_k}(I_{k-1} - I_k) - \frac{r_{C,k}}{L_k}(I_k) + \frac{v_{k-1}(t)}{L_k} - \frac{v_k(t)}{L_k}$$

$$\frac{dv_k}{dt} = \frac{I_k}{C(v_k(t))}; \quad k=N$$
(2.6)

LINHA CL

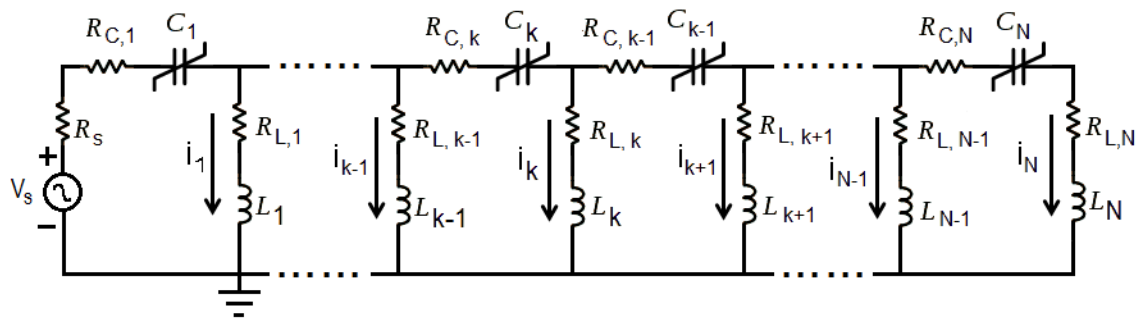


Figura 2.3 - Linha de topologia CL não linear generalizada.

A Figura 2.3 mostra uma linha CL generalizada, mas inicialmente vamos examinar uma linha com apenas três seções:

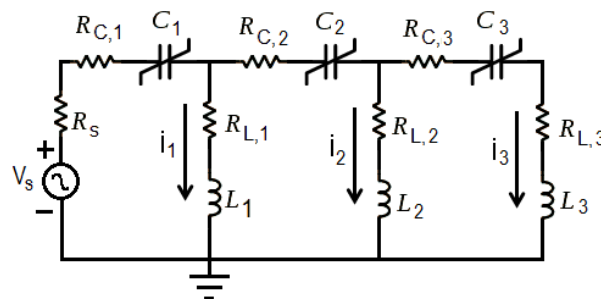


Figura 2.4 - Circuito de uma linha CL não linear com três seções.

Considerando cada uma das células CL (ver Figura 2.4), a partir das leis de Kirchhoff para tensão e corrente, obtemos as seguintes equações para esta linha.

$$\begin{aligned}
 V_0 - V_1 &= v_1(t) + r_{C,1}I_0 \\
 V_1 - V_2 &= v_2(t) + r_{C,2}(I_0 - I_1) \\
 V_2 - V_3 &= v_3(t) + r_{C,2}(I_0 - I_1 - I_2)
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

onde $V_1(t)$, $V_2(t)$ e $V_3(t)$ representam as tensões em cada nó e $I_1(t)$, $I_2(t)$ e $I_3(t)$ representam as correntes que circulam em cada ramo.

$$\begin{aligned}
 V_0 &= V_s - r_s I_0 \\
 V_1 &= r_{L,1}(I_1) + L \frac{dI_1}{dt} \\
 V_2 &= r_{L,2}(I_2) + L \frac{dI_2}{dt} \\
 V_3 &= r_{L,3}(I_3) + L \frac{dI_3}{dt}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Podemos então combinar (2.7) e (2.8) e desta forma escrever o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem:

$$\begin{aligned}
 \frac{dI_1}{dt} &= \frac{V_s}{L_1} - \frac{r_s}{L_1}(I_0) - \frac{r_{L,1}}{L_1}(I_1) - \frac{r_{C,1}}{L_1}(I_0) - \frac{v_1(t)}{L_1} \\
 \frac{dI_2}{dt} &= \frac{V_s}{L_2} - \frac{r_s}{L_2}(I_0) - \frac{r_{L,2}}{L_2}(I_2) - \frac{r_{C,1}}{L_2}(I_0) - \frac{r_{C,2}}{L_2}(I_0 - I_1) - \frac{v_1(t)}{L_2} - \frac{v_2(t)}{L_2} \\
 \frac{dI_3}{dt} &= \frac{V_s}{L_3} - \frac{r_s}{L_3}(I_0) - \frac{r_{L,3}}{L_3}(I_2) - \frac{r_{C,1}}{L_3}(I_0) - \frac{r_{C,2}}{L_3}(I_0 - I_1) - \frac{r_{C,3}}{L_3}(I_0 - I_1 - I_2) - \frac{v_1(t)}{L_3} - \frac{v_2(t)}{L_3} - \frac{v_3(t)}{L_3} \\
 \frac{dv_i}{dt} &= \frac{I_0}{C(v_i(t))}, \quad i = 1, 2, 3.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

onde $I_0 = \sum_{j=1}^3 I_j$

Ao generalizar as equações para um número qualquer de seções chega-se a única equação que se aplica às três categorias de seções, conforme apresentado a seguir:

$$\frac{dI_k}{dt} = \frac{V_s}{L_k} - \frac{r_s}{L_k} \sum_{j=k}^N I_j - \sum_{n=1}^k \sum_{j=n}^N I_j R_{c,n} - \sum_{j=k}^N V(t)_k - R_{L,k} I_k$$

$$\frac{dv_k}{dt} = \frac{\sum_{j=k}^N I_k}{C(v_k(t))}. \quad (2.10)$$

FORMULAÇÃO {i(t), q(t)}

LINHA LC

As equações de circuito generalizadas para um número qualquer de seções são divididas em três categorias de seções: inicial, intermediárias e final. Cada uma destas seções corresponde a duas equações, conforme apresentado a seguir:

Seção Inicial:

$$\frac{dI_k}{dt} = \frac{V_s}{L_k} - \frac{r_s}{L_k} (I_k) - \frac{r_{L,k+1}}{L_k} (I_k) - \frac{r_{C,k}}{L_k} (I_k - I_{k+1}) - \frac{v_k(q(t))}{L_k}$$

$$\frac{dq_k}{dt} = I_k. \quad (2.11)$$

onde $k = 1$ e V_s representa a tensão de entrada, podendo ser um sinal senoidal, ou uma forma arbitrária de pulso (trapezoidal, triangular, etc.)

Seção Intermediária:

$$\frac{dI_k}{dt} = -\frac{r_{L,k}}{L_k} (I_k) - \frac{r_{C,k-1}}{L_k} (I_{k-1} - I_k) - \frac{r_{C,k}}{L_k} (I_k - I_{k+1}) + \frac{v_{k-1}(q(t))}{L_k} - \frac{v_k(q(t))}{L_k}$$

$$\frac{dq_k}{dt} = I_k; \quad k = 2, 3, \dots, N-1 \quad (2.12)$$

Seção Final:

$$\frac{dI_k}{dt} = -\frac{r_{L,k}}{L_k}(I_k) - \frac{r_{C,k-1}}{L_k}(I_{k-1} - I_k) - \frac{r_{C,k}}{L_k}(I_k) + \frac{v_{k-1}(q(t))}{L_k} - \frac{v_k(q(t))}{L_k} \quad (2.13)$$

$$\frac{dq_k}{dt} = I_k; \quad k = N$$

onde a expressão da tensão no capacitor em função da carga $v(q(t))$ é obtida por exemplo, considerando um diodo varactor (capacitor não linear), com as seguintes características:

$$C(v(t)) = (A 10^{-m \cdot v(t)}) \quad (2.14)$$

Donde, obtém-se de (2.14) a expressão da carga em função da tensão

$$q(v) = \int_0^v C(v(t)) dv = \frac{A}{m \ln 10} (1 - 10^{-m v(t)}) \quad (2.15)$$

e de (2.15), obtém-se então a expressão da tensão no capacitor em função da carga

$$v_k(q(t)) = -\frac{A}{m \ln 10} \ln \left(1 - \frac{m q(t) \ln 10}{A} \right), \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.16)$$

LINHA CL

Analogamente à linha LC tem-se para a linha CL, um único sistema de equações para um número qualquer N de seções k:

$$\frac{dI_k}{dt} = \frac{V_s}{L_k} - \frac{r_s}{L_k} \sum_{j=k}^N I_j - \sum_{n=1}^k \sum_{j=n}^N I_j R_{c,n} - \sum_{j=k}^N v(q_k(t)) - R_{L,k} I_k \quad (2.17)$$

$$\frac{dq_k}{dt} = \sum_{j=k}^N I_j$$

RELAÇÕES DE DISPERSÃO

RELAÇÃO DISPERSÃO PARA LINHA LC LINEAR

Para análise no regime senoidal da linha periódica linear com $r_{C,k} = r_C$, $r_{L,k} = r_L$, $C_k = C$ e $L_k = L$, e considerando a variação espaço temporal $\exp[-i(\omega t - \beta n)]$, onde $n = x/p$ com x denotando a posição de um nó em relação à fonte quando $x = 0$, p representando o comprimento hipotético da célula unitária; β é o fator de propagação, que representa uma quantidade complexa que quantifica a atenuação e mudança de fase em cada célula. As equações para a tensão e corrente na linha LC (ver Figura 3.1) são

$$\begin{aligned}
 C U_k &= Q_k \\
 U_k &= V_k - (I_k - I_{k+1})r_C = V_k - I_k(1 - e^{i\beta})r_C \\
 Q'_k &= I_k - I_{k+1} \\
 V_{k-1} - V_k &= L I'_k + r_L I_k
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

onde U_k é a tensão sobre o capacitor shunt da k -ésima seção. Notando que a derivada no tempo das correntes $I'_k = -i\omega I_k$ a partir do pressuposto da variação harmônica temporal e $I'_{k\pm 1} = I_k e^{\pm i\beta}$ das condições periódicas, as Equações 2.18 passam a apresentar a forma

$$\begin{aligned}
 I_k(1 - e^{i\beta})(1 - i\omega r_C C) &= -i\omega C V_k \\
 V_k(e^{-i\beta} - 1) &= I_k(r_L - i\omega L)
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

o que leva à relação de dispersão

$$\frac{\tilde{\omega}^2 + i\tilde{\omega}a}{1 - i\tilde{\omega}b} = 4\text{sen}^2(\beta/2) \tag{2.20}$$

com $\tilde{\omega} = \omega/\omega_0$, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $a = R_L/Z_0$, $b = R_C/Z_0$ e $Z_0 = \sqrt{L/C}$.

Para uma linha LC sem perdas ($a = 0$, $b = 0$), a Equação 2.20 se reduz a

$$\tilde{\omega}^2 LC = 4 \operatorname{sen}^2(\beta/2) \quad (2.21)$$

onde o fator de fase β é real para $\omega < 2\omega_0$ e torna-se complexo quando $\omega > 2\omega_0$ como ilustra a Figura 2.5. Nesta figura tanto a atenuação e mudança de fase por seção são normalizados para π , por exemplo, quando $\omega/\omega_0 = 1$.

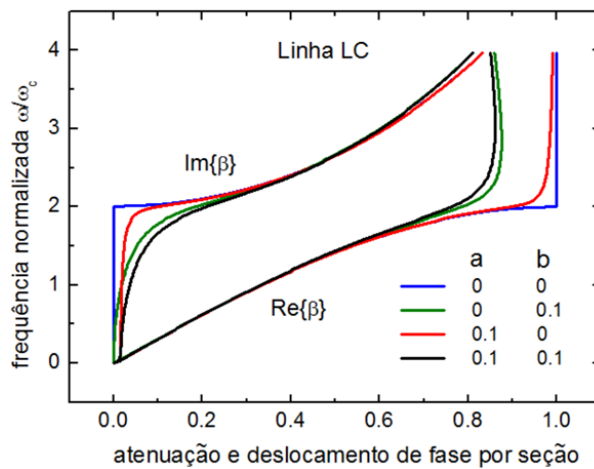


Figura 2.5 - Relação de dispersão para uma linha LC.

Notando que $4 \operatorname{sen}^2(\beta/2) = 2 - e^{-i\beta} - e^{i\beta}$, determina-se a parte imaginária de β (ver Figura 2.5)

$$\alpha(\omega) = 2 \ln \left(\frac{\omega/\omega_0}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega/\omega_0}{2} \right)^2 - 1} \right) \quad (2.22)$$

Sendo que a impedância Z_0 , e o índice de refração n , de um meio homogêneo relacionam-se mutuamente com o par de parâmetros equivalentes constitutivos $\{\epsilon, \mu\}$ por $n = \epsilon Z_0$ e $\mu = n Z_0$ podemos encontrar os parâmetros equivalentes ϵ e μ para a linha contínua no limite de homogenização $(2\pi/\beta) \gg 1$.

Na formulação desta equivalência tem-se que

$$\beta = \omega p \sqrt{\mu \varepsilon} \quad \text{e} \quad Z_0 = \sqrt{\mu / \varepsilon} \quad (2.23)$$

onde $Z_0 = Z_k = (1 - e^{i\beta})(1 - i\omega C)$ de (2.23) e portanto encontramos que

$$\mu_{LC} = \frac{-\alpha + i\pi}{\omega^2 p C} (1 + e^{-\alpha}) \quad \text{e} \quad \varepsilon_{LC} = \frac{\alpha - i\pi}{1 + e^{-\alpha}} \frac{C}{p} \quad (2.24)$$

Nota-se que a parte real da permeabilidade magnética equivalente é negativa, comportando-se a linha LC no regime $\omega > 2\omega_0$ como um plasma magnético [12].

RELAÇÃO DISPERSÃO PARA LINHA CL

Analogamente ao caso anterior, escrevendo as equações para tensão e corrente na linha CL (ver Figura 2.3)

$$\begin{aligned} V_k - V_{k+1} &= L(I'_k - I'_{k+1}) + r_L(I'_k - I'_{k+1}) = \frac{Q_{j+1}}{C} + r_C I_{j+1} \\ V_{k-1} - V_k &= L(I'_{k-1} - I'_k) + r_L(I'_{k-1} - I'_k) = \frac{Q_j}{C} + r_C I_j \end{aligned} \quad (2.25)$$

chega-se a

$$\omega^2 LC + i\omega r_L C = \frac{1 - i\omega r_C C}{4\text{sen}^2(\beta/2)} \quad (2.26)$$

que no caso sem perdas se reduz a

$$\omega = -\frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{1}{2\text{sen}(\beta/2)} \quad (2.27)$$

A presença do sinal negativo (oriundo da ambiguidade de sinal \pm da raiz quadrada) é justificada ao se examinar (2.27) no limite $\beta \ll 1$, que nos leva a $\beta = \pm 1/\omega\sqrt{LC}$, sendo

β/p a constante de propagação da presente linha CL de elementos concentrados. Mas da teoria de linhas de transmissão [13], sabemos que $i\beta$, relaciona-se com as imitâncias da linha por $\beta = i\sqrt{ZY}$. No presente caso, $Z = 1/(-i\omega C)$ e $Y = 1/(-i\omega L)$ e, portanto, $\beta = i\sqrt{\frac{i}{\omega C} \frac{i}{\omega L}} = \frac{-1}{\omega\sqrt{LC}}$ no limite $\beta \ll 1$.

Desta forma, a relação de dispersão da linha CL satisfaz as condições de onda regressiva e que apresenta velocidade de fase negativa, como ilustrado na Figura 2.6. No intervalo de frequência $\omega > \omega_0/2$, β é puramente real representando propagação sem atenuação no sistema; quando $\omega < \omega_0/2$, β é imaginário, indicando atenuação sem dissipação de energia.

Fazendo a equivalência dos parâmetros eletromagnéticos $\{Z_0, \beta\} \leftrightarrow \{\epsilon, \mu\}$ no regime $\omega < \omega_0/2$, para a linha CL, chega-se a

$$\mu_{CL} = \frac{L}{C}(1 + e^{-b})(b - i\pi), \quad \epsilon_{CL} = \frac{C}{p} 4 \operatorname{sen}^2(\beta/2) \frac{-b + i\pi}{(1 + e^{-b})} \quad (2.34)$$

com

$$b(\omega) = 2 \ln \left(\frac{1}{2\omega/\omega_0} + \sqrt{\frac{1}{4(\omega/\omega_0)^2} - 1} \right)$$

mostrando que a parte real da permissividade elétrica é negativa, de comportamento análogo a um plasma elétrico [14].

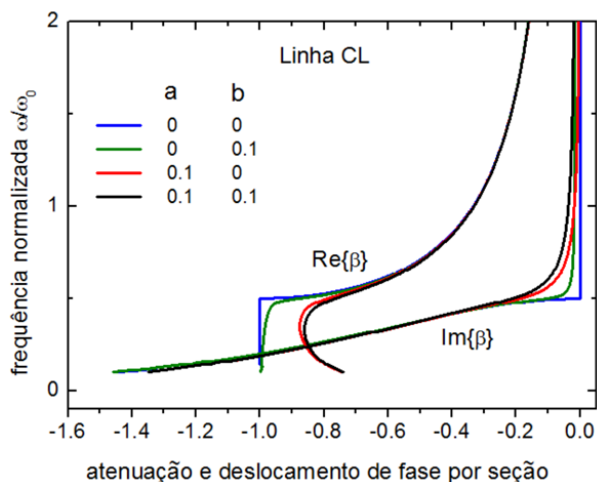


Figura 2.6 Relação de dispersão para uma linha CL.

COMENTÁRIOS E CONCLUSÃO

Embora usando os mesmos componentes L e C, a disposição dos capacitores e indutores faz com que o comportamento e desempenho das linhas LC (ver Figura 3.1) e CL (ver Figura 2.3) sejam completamente diferentes. A linha convencional LC apresenta dispersão normal em que a frequência aumenta com o fator de fase β . Por outro lado, a linha CL exibe dispersão anômala em que a frequência diminui com β , possibilitando que a onda fundamental possa se propagar em sincronismo com as harmônicas superiores. Ondas que se propagam em tal meio são conhecidas como ondas regressivas porquanto a velocidade de grupo tem sentido contrário à velocidade de fase.

Nesse sentido, simulações e experimentos computacionais serão realizados visando o estudo das propriedades características e os fenômenos de propagação de ondas que ocorrem em linhas de topologia LC e CL.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Dhaene, T.; Zutter, D., “**Selection of Lumped Element Models for Coupled Lossy Transmission Lines**”, IEEE Transactions on Computer-Aided Design, vol. 11, no. 7, pp. 805-8015, July, 1992.
- [2] Jong, J. - M.; Janko, B.; Tripathi, V., “**Equivalent Circuit Modeling of Interconnects from Time-Domain Measurements**”, IEEE Transactions on Components, Hybrids, and Manufacturing Technology, vol. 16, no. 1, pp. 119-126, February 1993.
- [3] Johnson, W. C., **Transmission Lines and Network**. Tokyo: Mc Graw Hill Kogaknsha, 1950.
- [4] Antomiades, M. A.; Eleftheriades, G.V., “**Compact linear lead/lag metamaterial phase shifters for broadband applications**”, IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, vol. 2, pp. 103-106, 2003.
- [5] Kim, H.; Kozyrev, A.B.; Karbassi, A.; Van der Weide, D.W., “**Linear tunable phase shifter using a left-handed transmission line**”, IEEE Microwave and Wireless Component Letters, vol. 15, No. 5, pp. 366-368, May 2005.
- [6] Powell, D. A.; Shadrivov, I.V.; Kivshar, Y.S., “**Asymmetric parametric amplification in nonlinear left-handed transmission lines**”, Applied Physics Letters, vol. 94, Article 084105, 2009.
- [7] Horii, Y.; Caloz, C.; Itoh, T., “**Super-compact left-handed transmission line and diplexer application**”, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. 53, No. 4, pp. 1527-1533, April 2005.
- [8] Caloz, C.; Itoh T., “**Novel microwave devices and structures based on the transmission line approach of meta-materials**”, in IEEE-MTT International Symposium Digest, June 2003, pp. 195–198.
- [9] “**Breakthrough of the year: The runners-up**”, Science, vol. 302, no. 5653, pp. 2039–2045, 2003.
- [10] Veselago, V., “**The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ** ”, Soviet Physics Uspekhi, vol. 10, no. 4, pp. 509–514, 1968.
- [11] Shelby, R. A.; Smith, D. R.; Schultz, S., “**Experimental verification of a negative index of refraction**”, Science, vol. 292, no. 5514, pp.77–79, 2001.
- [12] Simovski, C. R.; Belov, P.A.; Sailing, H., “**Backward wave region and negative material parameters of a structure formed by lattices of wires and split-ring resonators**”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 51, pp. 2582–2591, October. 2003.
- [13] Ozbay, E.; Aydin, K.; Cubukcu, E.; Bayindir, M., “**Transmission and reflection properties of composite double negative metamaterials in free space**”, IEEE Transactions Antennas and Propagation, vol. 51, pp. 2592–2595, October. 2003.
- [14] Caloz, C.; Okabe, H.; Iwai, T.; Itoh, T., “**Transmission line approach of left-handed (LH) materials**”, in Proceedings USNC/URSI National Radio Science Meeting, San Antonio, TX, June 2002, vol. 1, p. 39.
- [15] Caloz, C.; Itoh, T., **Electromagnetic Metamaterials: Transmission Line Theory and Microwave Applications**. New York: Wiley, 2004.
- [16] Eleftheriades, G. V.; Iyer, A. K.; Kremer, P. C., “**Planar negative refractive index media using periodically L-C loaded transmission lines**”, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. 50, pp. 2702–2712, December 2002.
- [17] Caloz, C.; Lin, I. – H.; Itoh, T., “**Characteristics and potential applications of nonlinear left-handed transmission lines**”, Microwave and Optical Technology Letters, vol. 40, No. 6, pp. 471-473, March 2004.

- [18] Kozyrev, A. B.; Van der Weide, D.W., “**Nonlinear left-handed transmission line metamaterials**”, Journal of Physics D: Applied Physics, vol. 41, Article 173001, 2008.
- [19] Kozyrev, A. B.; Van der Weide, D.W., “**Nonlinear wave propagation phenomena in left-handed transmission line media**”, IEEE Transaction on Microwave Theory and Techniques, vol. 53, No. 1, pp. 238-245, January 2005.
- [20] Wang, Z.; Feng, Y.; Zhu, B.; Zhao, J.; Jiang, T., “**Dark Schrodinger soliton and harmonic generation in left-handed nonlinear transmission line**”, Journal of Applied Physics, vol. 107, Article 094907, 210.
- [21] Gharakhili, F. G.; Shahabadi, M.; Hakkak, M., “**Bright and dark soliton generator in a left-handed nonlinear transmission line with series nonlinear capacitor**”, Progress in Electromagnetics Research – PIER, vol. 96, pp. 237-249, 2009.
- [22] English, L. Q.; Wheeler, S. G.; Shen, Y.; Veldes, G. P., N. Whitaker, P. G. Kevrekidis and D. J. Frantzeskasis, “**Backward-wave propagation and discrete solitons in a left-handed electrical lattice**”, Physics Letters A, vol. 375, pp. 1242-1248, 2011.
- [23] Tsuboi, T.; Toyama, F. M., “**Computer experiments on solitons in nonlinear transmission lines. I. Formation of stable solitons**”, Physical Review A, vol. 44. No. 4, pp. 2686-2690, 1991.
- [24] Martin, F.; Oriols, X., “**Simple model to study soliton wave propagation in periodic-loaded nonlinear transmission lines**”, Applied Physics Letters, vol. 78, No. 18, pp. 2802-2804, April 2001.
- [25] Marksteiner, Q. R.; Carlsten, B.; Russel, S., “**Numerical Calculations of RF efficiency from a soliton generating nonlinear transmission line**”, Journal of Applied Physics, vol. 106, Article 113306, 2009.
- [26] Fernandez, M.; Martin, F.; Steenson, P.; Mélique, X.; Oistein, A.; Oriols, X.; Vanbésien, O.; Garcia-Garcia, J.; Miles, R.; Lippens, D., “**A comparison of different approaches for the simulation of nonlinear transmission lines**”, Microwave and Optical Technology Letters, vol. 33. No. 2, pp. 134-136, April 2002.
- [27] Marksteiner, Q. R.; Carlsten, B.; Russel, S., “**Efficient generation of RF using a biased soliton generating nonlinear transmission line with a bipolar input**”, Microwave and Optical Technology Letters, vol. 52, No. 6, pp. 1411-1413, June 2010.
- [28] Martin, F.; Oriols, X., “**Effects of line parameters on soliton-like propagation in nonlinear transmission lines: application to the optimization of frequency triplers**”, International Journal of Infrared and Millimeter Waves, vol. 22.
- [29] Remoissenet, M., **Waves Called Solitons: Concepts and Experiments**. Berlin: Springer, 1999.